

# SUL PLANIMETRO PANTOGRAFO

di Amsler-Laffon

---

*Nota dell' Ing. G. B. MAFFIOTTI*

---

*Estratto dalla Rivista di Topografia e Catasto*

---

ROMA

STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. CIVELLI

—  
1893



# SUL PLANIMETRO PANTOGRAFO

di Amsler=Laffon

---

*Nota dell' Ing. G. B. MAFFIOTTI*

---

---

*Estratto dalla Rivista di Topografia e Catasto*

---

ROMA

STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. CIVELLI

—  
1893



1. — Il planimetro pantografo, ideato e costruito dalla casa *Amster-Laffon e figlio* di Sciaffusa, non è che un planimetro polare coll'aggiunta di un nuovo braccio viaggiante destinato alla misura delle aree di piccola estensione.

Lo strumento è rappresentato schematicamente nella fig. 1<sup>a</sup>.  $PnN$  è il braccio polare;  $NTF$  è il braccio viaggiante principale scorrevole entro la guaina  $G$ , la quale porta la rotella  $R$  e l'apparecchio di numerazione non indicato nella figura. Questi organi costituiscono un planimetro polare ordinario del tipo noto.

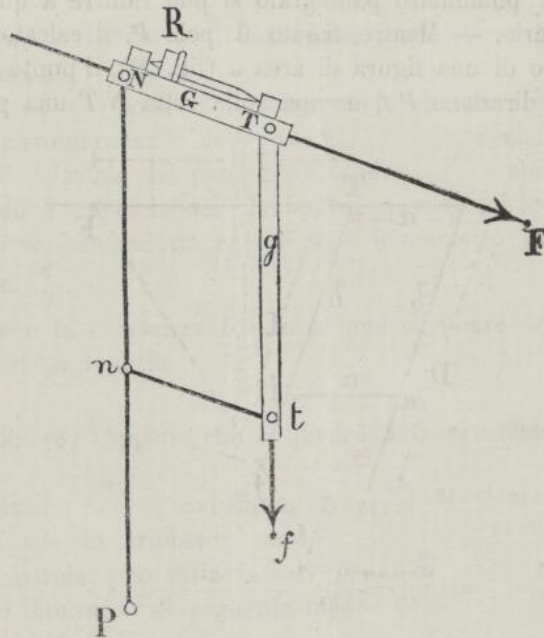


Fig. 1.<sup>a</sup>

Il braccio viaggiante aggiunto rappresentato in  $Ttf$  è scorrevole entro la guaina  $g$ , la quale forma parte del parallelogramma articolato  $NTtn$ . — La costruzione dello strumento è fatta in modo che il polo  $P$  ed i due calcoloi  $f$  ed  $F$  dei due bracci viaggianti si trovano rispettivamente sulla direzione dei lati  $Nn$ ,  $Tt$ , ed  $NT$  del parallelogrammo.

Per misurare col braccio viaggiante aggiunto aree di piccola estensione si fissa il polo  $P$ , indi, afferrato il calcatoio  $F$  del braccio viaggiante principale, si muove lo strumento in guisa che il calcatoio  $f$ , che si seguirà coll'occhio, percorra il perimetro della figura da misurarsi. — Il numero delle unità del nonio segnato dalla rotella durante questo percorso è, come nel planimetro ordinario, proporzionale all'area della figura descritta.

Il calcatoio  $f$  è costituito da un cilindretto ben tornito terminato a punta. — Esso è scorrevole a dolce sfregamento entro un astuccio dal quale può essere levato quando lo strumento è usato col braccio  $NF$ , come planimetro ordinario.

Nei planimetri pantografi posti in vendita dalla casa Amsler-Laffon i bracci viaggianti portano incisi vari tratti coi coefficienti che rappresentano i valori dell'unità del nonio corrispondenti a quelle tacche. Dietro richiesta la casa Amsler, mediante un lieve aumento di prezzo, costruisce pure planimetri coi bracci viaggianti graduati a millimetri e colle guaine munite di un nonio che permette di leggere il decimo di millimetro.

Questa Nota si riferisce specialmente ai planimetri così modificati.

### Teoria del planimetro pantografo.

2. — Se si suppone che il quadrilatero articolato  $NntT$  sia un parallelogramma esatto, la teoria del planimetro pantografo si può ridurre a quella nota del planimetro polare ordinario. — Mentre, fissato il polo  $P$ , il calcatoio  $f$  del pantografo percorre il perimetro di una figura di area  $\omega$  (fig. 2<sup>a</sup>), il punto  $F$ , intersezione della direzione  $NT$  colla direzione  $Pf$ , occupa sulla retta  $NT$  una posizione costante, e

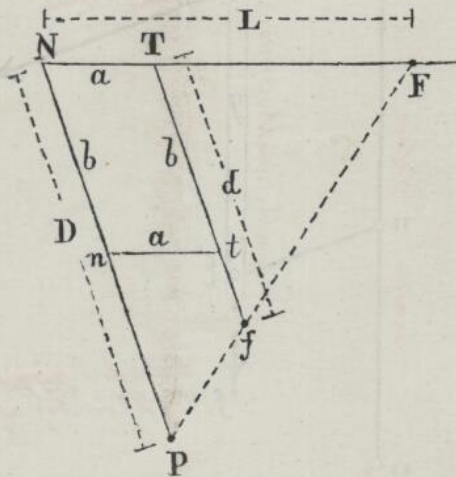


Fig. 2.<sup>a</sup>

descrive una figura  $\Omega$  simile ad  $\omega$ , ingrandita nel rapporto dei quadrati delle distanze  $PF$  e  $Pf$ , si ha cioè:

$$\frac{\omega}{\Omega} = \left( \frac{Pf}{PF} \right)^2.$$

Ponendo  $PN = D$ ,  $NF = L$ ,  $NT = nt = a$ ,  $Tf = d$  si ha, per il parallelismo delle rette  $Tf$ ,  $PN$

$$\frac{Pf}{PF} = \frac{a}{L}, \text{ ed anche } \frac{Pf}{PF} = \frac{D-d}{D};$$

quindi

$$(1) \dots \dots \frac{\omega}{\Omega} = \frac{a}{L} \frac{D-d}{D}.$$

D'altra parte, com'è noto dalla teoria del planimetro polare ordinario, fra l'area  $\Omega$  circoscritta dal punto  $F$ , la lunghezza  $L$  del braccio viaggiante, il numero  $n$  delle unità del nonio segnate dalla rotella e la circonferenza  $c$  di questa esiste la relazione

$$(2) \dots \dots \Omega = c L \frac{n}{1000}.$$

Indicando con  $l$  il numero delle unità del nonio segnate dalla rotella per un percorso rettilineo (nella direzione del suo piano) eguale a 100 mm., si avrà:  $\frac{l c}{1000} = 100$ , e perciò:

$$(2') \dots \dots \Omega = 100 \frac{L}{l} n.$$

Eliminando  $\Omega$  ed  $L$  fra le eq. (1) e (2') si trova

$$(3) \dots \dots \omega = 100 \frac{a}{l} \frac{D-d}{D} n.$$

Questa è la formola che serve al Costruttore per determinare i coefficienti costanti dello strumento.

Confrontando la eq. (3) colla (2'), e osservando che la costante  $l$  varia in ragione inversa della circonferenza  $c$  della rotella, si scorge che impiegando nella misura di un'area il calcoatoio del pantografo si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe impiegando il calcoatoio del planimetro, quando la lunghezza del braccio viaggiante di questo venisse ridotta a  $D-d$ , e il diametro della rotella fosse diminuito nel rapporto  $\frac{a}{D}$ .

Per questo motivo la lunghezza  $D-d$  si può chiamare *lunghezza virtuale* del braccio viaggiante del pantografo.

3. — La formola (3) suppone che il quadrilatero articolato sia un parallelogrammo esatto.

Se questa condizione non è soddisfatta, ma le differenze fra i lati opposti del quadrilatero sono piccole, lo strumento, sebbene cessi di essere un pantografo nel senso rigoroso della parola, può tuttavia servire alla misura delle aree.

Il costruttore lo dimostra nel seguente modo: <sup>(1)</sup>

(1) Avendo notato nei primi planimetri pantografi sperimentati, che ponendo i due calcoati in linea retta col polo e misurando le distanze  $Pf$ ,  $PF$  per varie aperture dei bracci, il rapporto  $\frac{Pf}{PF}$  non si manteneva sufficientemente costante come sarebbe stato necessario se lo strumento fosse stato un vero pantografo, ne resi informata la casa costruttrice, la quale cortesemente rispose comunicando la teoria dello strumento, quale ho riprodotto sostanzialmente nel n.º 3 della presente Nota. Da questa teoria risulta che l'eguaglianza rigorosa dei lati opposti del quadrilatero articolato non è condizione indispensabile di esattezza dello strumento.

Tuttavia la Casa cerca di ottenere che il quadrilatero articolato riesca un vero parallelogrammo;

Siano (fig. 3<sup>a</sup>)  $a, a', b, b'$  i lati del quadrilatero effettivo  $Nn'tT$ ,  $\varphi$  e  $\varphi'$  gli angoli formati dai lati  $a$  ed  $a'$  col braccio polare  $PN$ .

Sui lati  $a$  e  $b$  si supponga costruito il parallelogramma esatto  $Nn'tT$  e siano  $\omega_T, \omega_i, \omega_i', \omega$  le aree circoscritte simultaneamente dai punti  $T, t, t', f$ ; ed  $n$  il numero delle unità del nonio segnate dalla rotella.

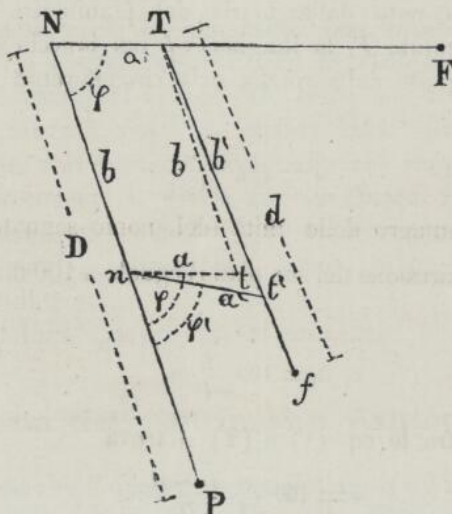


Fig. 3.<sup>a</sup>

I punti  $f, t'$  e  $T$  sono, per ipotesi, in linea retta; quindi fra le aree  $\omega, \omega_i, \omega_T$ , esiste la relazione (1).

$$(4) \quad \omega = \omega_T + \frac{\omega_i' - \omega_T}{b'} d.$$

La teoria del planimetro insegna che indicando con  $ds$ , e  $dS$  i differenziali degli archi descritti dai punti  $n$  ed  $N$ , si ha

$$(5) \quad \omega_T = a \int dS \cos \varphi = 100 \frac{a}{l} n.$$

$$(6) \quad \omega_i' = a' \int ds \cos \varphi',$$

$$(7) \quad \omega_i = a \int ds \cos \varphi.$$

Tenendo conto della relazione

$$\frac{ds}{dS} = \frac{D - b}{D},$$

ricaveremo dalle (5) e (7)

$$(8) \quad \omega_i = \frac{D - b}{D} \omega_T = 100 \frac{a}{l} \frac{D - b}{D} n.$$

difatti in tutti i planimetri dei quali si ebbero in comunicazione le dimensioni, l'eguaglianza dei lati opposti esiste.

Perciò in questi strumenti il rapporto  $\frac{Pf}{PF}$  dovrebbe essere costante quando  $f$  ed  $F$  sono in linea retta col polo. Ma, come si vedrà al n.° 5, questa prova, che, quando riuscisse negativa non autorizzerebbe ancora nessun giudizio sicuro sulla inservibilità del pantografo, può essere utilmente sostituita da un'altra più concludente e più utile.

(1) Vedi *Appendice*.



Consideriamo ora la differenza

$$\omega_{t'} - \omega_t = \int ds (a' \cos \varphi' - a \cos \varphi),$$

ed osserviamo che indicando con  $\beta$  l'angolo  $t T t'$  che rappresenta la deviazione dal parallelismo dei lati  $b$  e  $b'$ , si ha:

$$a' \cos \varphi' - a \cos \varphi = b' \cos \beta - b,$$

poichè tanto il primo come il secondo membro dell'equazione rappresenta la proiezione di  $t t'$  sulla direzione  $P N$ , quindi:

$$(9) \quad \omega_{t'} - \omega_t = \int ds (b' \cos \beta - b).$$

Se le differenze  $a' - a$ ,  $b' - b$  sono piccole, e se l'angolo  $\varphi$  si conserva abbastanza lontano dai due limiti  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , l'angolo  $\beta$  è piccolo, e  $\cos \beta$  perciò vicinissimo all'unità; per cui ponendo per approssimazione  $\cos \beta = 1$  si avrà:

$$\omega_{t'} - \omega_t = \int ds (b' - b) = (b' - b) \int ds.$$

Ma  $\int ds = 0$ , perchè il polo è, supponiamo, esterno alla figura; perciò:

$$\omega_{t'} = \omega_t.$$

Ponendo nella (4)  $\omega'$  invece di  $\omega_{t'}$  e avendo riguardo alle (5) e (8), si ricaverà finalmente

$$(3) \quad \omega = 100 \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{b}{b'} \frac{d}{D} \right) n.$$

equazione che sostituisce la (3) quando i lati opposti del quadrilatero non sono eguali fra loro.

4. — Cerchiamo fra quali limiti è lecito porre, come abbiamo fatto,  $\cos \beta = 1$ .

Ponendo  $a' - a = \delta a$  e  $b' - b = \delta b$  è facile vedere che, trascurando le potenze di  $\delta a$ , e  $\delta b$  superiori alla prima, si ha:

$$\beta = \frac{\delta a - \cos \varphi \delta b}{b \sin \varphi}.$$

Questa eq. dimostra che l'angolo  $\beta$  è una quantità piccola dello stesso ordine di grandezza di  $\delta a$  e  $\delta b$ . — Se queste quantità si considerano come piccole del 1.º ordine di grandezza rispetto ad  $a$  e  $b$  la differenza

$$\cos \beta - 1 = -\frac{1}{2} \beta^2 + \dots$$

sarà quantità piccola del 2.º ordine di grandezza.

Ma perchè questa conclusione sia lecita è necessario che l'angolo  $\varphi$  non sia troppo vicino a  $0^\circ$  ovvero  $180^\circ$  affinchè il denominatore di  $\beta$  non diventi troppo piccolo.

L'errore che si commette ponendo  $\cos \beta = 1$  nell'eq. (9) è rappresentato da

$$-\frac{1}{2} b' \int \beta^2 ds,$$

ed è quindi in valore assoluto sensibilmente minore di

$$\frac{1}{2} b' s \beta_m^2,$$

essendo  $\beta_m$  il valore massimo di  $\beta$ , ed  $s$  l'arco di circolo descritto dal punto  $n$  fra le posizioni estreme del planimetro.

Ad es. se  $b = 130$ ,  $\delta a = \delta b = 0,5$   $\varphi = 135^\circ$ , si troverà  $\beta = 0.0093$ .

Per  $s = 200$  (valore che non si raggiunge quasi mai in pratica) si avrebbe così un errore minore di

$$\frac{1}{2} \cdot 130 \cdot 200 \cdot \overline{0,0093}^2 = 1,1 \text{ circa}$$

cioè minore assai degli errori di misura dovuti ad altre cause.

### Verificazione del pantografo e determinazione delle sue costanti.

3. — Restringere le mie considerazioni agli organi costituenti il pantografo, tralasciando di parlare delle verifiche relative alla graduazione della rotella e del nonio, al parallelismo dell'asse della rotella e del braccio viaggiante, al buon funzionamento delle altre parti del planimetro polare ecc.; sul quale argomento varii sono gli scritti che il lettore potrà consultare con profitto.<sup>(1)</sup>

La verificazione diretta di  $a, a', b, b', D, d$ , richiederebbe l'impiego di strumenti speciali, come quelli di cui si serve la casa costruttrice per determinare quelle lunghezze.

Ma una verificazione sintetica del pantografo è possibile quando si possa ricorrere a uno strumento di precisione per la misura delle lunghezze; com'è il *metro comparatore a microscopi micrometrici* di cui dispongono le Direzioni Compartimentali del Catasto.

Se per il regolare funzionamento dello strumento il quadrilatero articolato dovesse essere necessariamente un parallelogramma esatto, sarebbe facile l'accertarsi se questa condizione è o meno soddisfatta. Basterebbe disporre i due calcoi in linea retta col polo e misurare per varie aperture del planimetro le distanze  $r, r', r'', \dots$  del calcoio  $f$  dal polo, e le distanze corrispondenti  $R, R', R'', \dots$  del calcoio  $F$ . I rapporti  $\frac{r}{R}, \frac{r'}{R'} \dots$  dovrebbero essere eguali.

Ma, come abbiamo veduto al n.º 3, una piccola differenza nelle lunghezze dei lati opposti del quadrilatero non dà luogo che ad un errore affatto trascurabile nelle aree misurate col pantografo. Quindi i rapporti  $\frac{r}{R}, \frac{r'}{R'}$  possono presentare discrepanze, senza che ciò autorizzi a giudicare il pantografo non adatto alla misura delle aree.

È dunque necessario ricorrere a un altro criterio.

Osserviamo che se il pantografo deve soddisfare allo scopo per cui è costruito è necessario che, data ai bracci viaggianti una lunghezza determinata, le aree qualisivogliono  $\omega$  ed  $\Omega$  circoscritte simultaneamente dai due calcoi  $f$  ed  $F$  siano fra loro proporzionali, qualunque sia la forma delle figure.

---

(1) Vedasi ad esempio l'istruzione del Coradi sull'impiego e sulla verificazione del planimetro polare semplice: *Praktische Anleitung zum Gebrauch und zur gründlichen Prüfung des einfachen Polar-Planimeters*. La traduzione è stata pubblicata nella *Rivista* Giugno 1893.

Consideriamo il caso particolare in cui l'area circoscritta da uno dei calcoi è una corona circolare col centro nel polo  $P$ . L'area circoscritta dall'altro calcoio sarà pure una corona circolare concentrica alla prima. Per metterci poi nelle condizioni presupposte dalle formole (3) e (3') che abbiamo dedotto nell'ipotesi che il polo sia esterno alla figura, basterà immaginare che per descrivere le corone circolari rispettive i due calcoi partendo dai punti  $f$  ed  $F$  (fig. 4<sup>a</sup>) percorrano il cammino

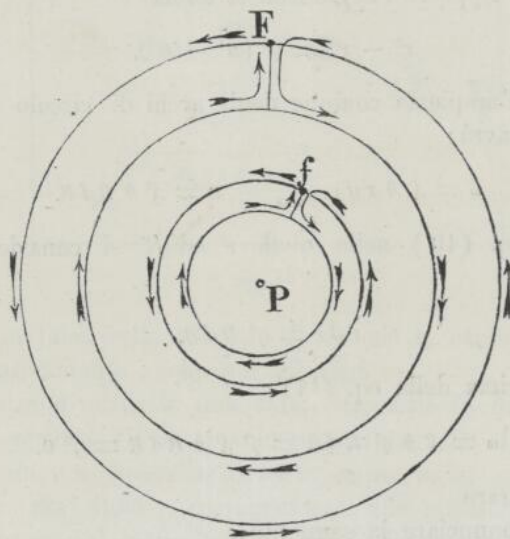


Fig. 4.<sup>a</sup>

indicato dalle frecce e ritornino al punto di partenza. Detti  $r$  ed  $R$  i raggi delle circonferenze esterne  $r'$  ed  $R'$  i raggi delle circonferenze interne avremo

$$\omega = \pi (r^2 - r'^2) \qquad \Omega = \pi (R^2 - R'^2).$$

Ne concludiamo che il rapporto

$$(10) \qquad \frac{\pi (r^2 - r'^2)}{\pi (R^2 - R'^2)} = \frac{r^2 - r'^2}{R^2 - R'^2},$$

deve essere costante per qualunque apertura del planimetro.

La verifica del pantografo è dunque ridotta alla determinazione delle lunghezze  $r$ ,  $r'$ ,  $R$ ,  $R'$  per varie aperture dello strumento. Questa determinazione non offre difficoltà: basta disporre il planimetro sopra un foglio di carta da disegno disteso sopra una tavoletta ben piana, fissare il polo, dare allo strumento diverse posizioni (allargando o restringendo l'apertura delle braccia), e per ciascuna posizione premere leggermente le teste dei calcoi. Tolto il planimetro si avranno sulla carta le tracce del polo e delle punte dei due calcoi, onde si potranno misurare col metro comparatore le distanze  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ , ... del calcoio  $f$  dal polo, e le distanze corrispondenti  $R$ ,  $R'$ ,  $R''$ , ... del calcoio  $F$ . I rapporti (10) formati combinando due a due le varie posizioni del planimetro, dovranno essere uguali.

6. — Inversamente se il rapporto (10) è costante per le varie aperture del planimetro le aree circoscritte simultaneamente dai due calcoi  $f$  ed  $F$  sono pure fra loro in un rapporto costante.

Infatti siano  $\omega$  ed  $\Omega$  due aree qualunque descritte dai due calcoi. Immaginiamole scomposte in zone elementari mediante archi di circolo, quali sarebbero descritti simultaneamente dai due calcoi quando il planimetro girasse, senza cambiare apertura, attorno al polo  $P$ . Siano:  $r$  il raggio di un arco qualunque compreso nella figura  $\omega$ ,  $R$  il raggio corrispondente all'arco compreso nella figura  $\Omega$ ;  $r'$  ed  $R'$  i valori particolari di  $r$  ed  $R$ , per una data apertura del planimetro, e  $q^2$  il valore costante del rapporto (10) talchè si abbia

$$(10') \quad r^2 - r'^2 = q^2 (R^2 - R'^2).$$

Indicando con  $\theta$  l'ampiezza comune degli archi di circolo descritti simultaneamente dai calcoi si avrà:

$$(11) \quad \omega = \int \theta r dr, \quad \Omega = \int \theta R dR.$$

Differenziando l'eq. (10') nella quale  $r'$  ed  $R'$  si considerano come costanti avremo:

$$r dr = q^2 R dR,$$

e, sostituendo nella prima della eq. (11)

$$\omega = \int \theta q^2 R dR = q^2 \int \theta R dR = q^2 \Omega.$$

come si voleva dimostrare.

Possiamo quindi enunciare la seguente:

PROPOSIZIONE. — *La condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza del pantografo è che il rapporto (10) fra le differenze dei quadrati delle distanze dei calcoi dal polo sia costante.*

7. — Ricordando le formule (3') e (2) che danno le aree  $\omega$  ed  $\Omega$  si vedrà che il valore della costante  $q^2$  vale

$$(1') \quad q^2 = \frac{a}{L} \left( 1 - \frac{b}{b'} \frac{d}{D} \right);$$

per cui la formula (3') del pantografo assume la forma

$$\omega = 100 q^2 \frac{l}{L} n,$$

nella quale più non figurano che le quantità  $q^2$ ,  $L$ ,  $l$  delle quali la prima si misura col procedimento più sopra spiegato, la seconda si legge sul nonio, la terza si può determinare sperimentalmente.

8. — Quando si debbono verificare molti pantografi e le lunghezze dei bracci da adottarsi nell'esperimento variano poco da strumento a strumento. la misura delle distanze  $r$ ,  $R$  ed il calcolo di  $q^2$  si può facilitare preparando una lastra di zinco sulla quale si praticheranno, mediante un punzone a punta conica molto acuta, o anche con un ago, varie piccole cavità  $P$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3 \dots$  (fig. 5) a distanze convenienti, larghe e profonde appena quanto è necessario per offrire presa (senza giuoco) al polo  $P$  del planimetro, e al calcoio  $F$ .

Perchè la misura delle distanze  $r$  possa eseguirsi senza spostare per ognuna di esse il metro comparatore, i punti  $F_1, F_2 \dots$  si disporranno lungo una curva scelta in guisa che, per le lunghezze dei bracci da sperimentarsi, le traccie  $f_1, f_2, \dots$  del

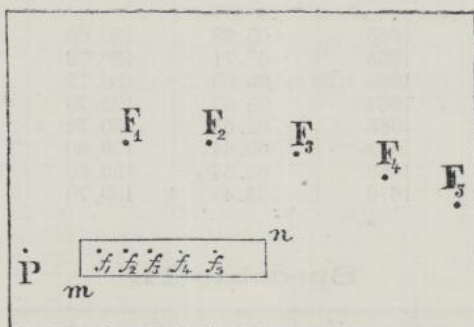


Fig. 5.ª

calcatoio  $f$  riescano in linea retta col polo  $P$ . Se ciò si ottiene per uno strumento si otterrà approssimativamente anche per gli altri.

Preparata la lastra e misurate una volta per tutte le distanze  $PF_1, PF_2 \dots$ , per procedere alla verifica di un planimetro pantografo si fisserà colla gomma, sulla lastra di zinco, una listerella di carta  $m n$ , e su questa si riceveranno le traccie  $f_1, f_2 \dots$  del calcatoio  $f$ , corrispondenti alle posizioni  $F_1, F_2 \dots$  del calcatoio  $F$ , indi si misureranno col metro comparatore le distanze  $Pf_1, Pf_2, \dots$ . La listerella di carta va rinnovata ad ogni nuova operazione.

9. — *Esempi.* — Diamo come esempi i risultati ottenuti sopra 8 planimetri pantografi, dei quali 5 nuovi di fabbrica, e tre già usati per circa un anno.

Lo specchio  $A$  dà le dimensioni dei planimetri e le lunghezze  $L_0, d_0$  assunte per i bracci viaggianti.

Queste lunghezze sono state calcolate in base ai dati del costruttore, in modo che il valore dell'unità del nonio fosse 10 per il planimetro e 1 per il pantografo; e quindi il valore del rapporto  $q^2$  fosse 0,10.

### Specchio A. (1)

Num. distintivo dei planimetri	<i>D</i>	<i>l</i>	<i>a = a'</i>	<i>b = b'</i>	<i>L<sub>o</sub></i>	<i>d<sub>o</sub></i>
18 255	240.3	1665	65.68	130.60	166,50	179.37
18 988	240.6	1666	65.71	130,72	166,60	179.60
18 989	240.6	1665	65.63	130,72	166,50	179.56
18 996	240.2	1664	65.63	130,75	166,40	179.30
19 004	240.5	1665	65.63	130,72	166,50	179.49
17 841	239.5	1673	65.44	130,60	167,30	178.27
17 845	239.3	1669	65.64	130,60	166,90	178.45
17 848	239.5	1670	65.48	130,70	167,00	178.42

### Specchio B.

Numero d'ordine del gruppo	Valori di <i>R</i>	VALORI DI <i>r</i> PER I PLANIMETRI DISTINTI COL n.°								
		18255	18988	18989	18996	19004	17841	17845	17848	
<b>1</b>	<i>a</i>	139.31	37.85	37.66	37.60	37.70	37.70	37.62	37.77	37.13
	<i>b</i>	141.12	38.50	38.30	38.26	38.83	38.36	38.22	38.43	38.15
	<i>c</i>	143.06	39.18	39.01	39.00	39.06	39.12	38.99	39.13	38.88
	<i>d</i>	144.96	39.89	39.72	39.69	39.73	39.77	39.66	39.83	39.55
	<i>e</i>	147.13	40.63	40.50	40.49	40.54	40.58	40.42	40.60	40.36
	<i>f</i>	149.80	41.65	41.47	41.48	41.52	41.56	41.40	41.57	41.35
	<i>g</i>	151.58	42.27	42.14	42.14	42.17	42.20	42.04	42.21	41.97
<b>2</b>	<i>a</i>	211.10	62.85	62.68	62.70	62.71	62.77	62.62	62.72	62.61
	<i>b</i>	213.46	63.63	63.47	63.49	63.52	63.56	63.42	63.51	63.42
	<i>c</i>	216.10	64.55	64.34	64.38	64.38	64.46	64.29	64.37	64.28
	<i>d</i>	218.60	65.32	65.17	65.22	65.21	65.29	65.14	65.22	65.11
	<i>e</i>	221.04	66.20	65.99	66.03	66.03	66.12	65.93	66.06	65.96
	<i>f</i>	223.76	67.12	66.90	66.95	66.94	67.02	66.87	66.96	66.89
	<i>g</i>	226.21	67.90	67.72	67.77	67.77	67.84	67.68	67.77	67.71
<b>3</b>	<i>a</i>	286.60	87.84	87.62	87.71	87.66	87.77	87.61	87.68	87.69
	<i>b</i>	289.09	88.60	88.43	88.49	88.48	88.59	88.43	88.48	88.52
	<i>c</i>	291.60	89.46	89.27	89.28	89.30	89.42	89.25	89.30	89.32
	<i>d</i>	293.76	90.12	89.98	90.00	90.02	90.11	89.94	90.01	90.05
	<i>e</i>	296.32	91.00	90.80	90.84	90.84	90.96	90.80	90.85	90.90
	<i>f</i>	299.19	91.88	91.74	91.77	91.77	91.86	91.73	91.78	91.82
	<i>g</i>	302.06	92.86	92.69	92.72	92.71	92.82	92.68	92.73	92.77
<b>4</b>	<i>a</i>	364.83	113.17	113.00	113.04	113.01	113.14	113.08	113.08	113.28
	<i>b</i>	367.55	114.01	113.86	113.90	113.90	114.03	113.96	113.98	114.13
	<i>c</i>	370.28	114.93	114.79	114.76	114.76	114.91	114.85	114.86	115.03
	<i>d</i>	372.65	115.69	115.50	115.52	115.52	115.69	115.60	115.61	115.81
	<i>e</i>	375.28	116.54	116.38	116.37	116.37	116.53	116.47	116.47	116.66
	<i>f</i>	377.94	117.37	117.21	117.24	117.24	117.38	117.32	117.33	117.52
	<i>g</i>	380.37	118.20	118.02	118.03	118.04	118.19	118.12	118.10	118.33

(1) Tanto nello specchio A come nei successivi B, C, D l'unità di misura per le lunghezze è il millimetro.

**Specchio C - planimetro n.° 18988.**

N.° d'ordine	Gruppi combinati	$\Delta R^2$	$10 \Delta r^2$	$10 \Delta r^2 \mid$ $\Delta R^2$	$q^2 - 0,10$	Calcolo dell'errore medio di $\delta q^2$ in unità del 5° ordine decimale			
						$e = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{7(7-1)}}$	scostamenti dalla media $\varepsilon$	$\varepsilon^2$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1 e 2	a	25.156	25.105	- 51	-0,00020	+ 4	16	± 2,23
		b	25.652	25.615	- 37	- , 14	+ 10	100	
		c	26.235	26.178	- 57	- , 22	+ 2	4	
		d	26.771	26.694	- 77	- , 29	- 5	25	
		e	27.211	27.145	- 66	- , 24	0	0	
		f	27.627	27.558	- 69	- , 25	- 1	1	
		g	28.193	28.102	- 91	- , 32	- 8	64	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00024$						[ $\varepsilon^2$ ] = 240			
2	2 e 3	a	37.577	37.485	- 92	-0,00025	- 12	144	± 3,27
		b	38.006	37.915	- 91	- , 24	- 11	121	
		c	38.330	38.295	- 35	- , 9	+ 4	16	
		d	38.509	38.493	- 16	- , 4	+ 9	81	
		e	38.947	38.899	- 48	- , 12	+ 1	1	
		f	39.450	39.406	- 44	- , 11	+ 2	4	
		g	40.069	40.054	- 15	- , 4	+ 9	81	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00013$						[ $\varepsilon^2$ ] = 448			
3	3 e 4	a	50.961	50.917	- 44	-0,00009	+ 7	49	± 2,78
		b	51.520	51.439	- 81	- , 16	0	0	
		c	52.076	51.961	- 115	- , 22	- 6	36	
		d	52.577	52.436	- 141	- , 27	- 11	121	
		e	53.029	52.998	- 31	- , 6	+ 10	100	
		f	53.320	53.221	- 99	- , 19	- 3	9	
		g	53.441	53.374	- 67	- , 13	+ 3	9	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00016$						[ $\varepsilon^2$ ] = 324			
4	1 e 3	a	62.733	62.590	- 143	-0,00023	- 6	36	± 1,33
		b	63.658	63.530	- 128	- , 20	- 3	9	
		c	64.565	64.473	- 92	- , 14	+ 3	9	
		d	65.280	65.187	- 93	- , 14	+ 3	9	
		e	66.158	66.044	- 114	- , 17	0	0	
		f	67.077	66.954	- 113	- , 17	0	0	
		g	68.262	68.156	- 106	- , 16	+ 1	1	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00017$						[ $\varepsilon^2$ ] = 64			
5	2 e 4	a	88.538	88.402	- 136	-0,00015	- 1	1	± 1,50
		b	89.526	89.354	- 172	- , 19	- 5	25	
		c	90.406	90.256	- 150	- , 17	- 3	9	
		d	91.086	90.929	- 157	- , 17	- 3	9	
		e	91.976	91.897	- 79	- , 9	+ 5	25	
		f	92.770	92.627	- 143	- , 15	- 1	1	
		g	93.510	93.428	- 82	- , 9	+ 5	25	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00014$						[ $\varepsilon^2$ ] = 95			
6	1 e 4	a	113.697	113.507	- 190	-0,00017	0		± 1,05
		b	115.178	114.969	- 209	- , 18	- 1	1	
		c	116.641	116.434	- 207	- , 18	- 1	1	
		d	117.857	117.623	- 234	- , 20	- 3	9	
		e	119.187	119.042	- 145	- , 12	+ 5	25	
		f	120.397	120.183	- 214	- , 18	- 1	1	
		g	121.703	121.530	- 173	- , 14	+ 3	9	
Media aritmetica $\delta q^2 = -0,00017$						[ $\varepsilon^2$ ] = 46			

Specchio D.

Numero di fabbrica del planimetro	Gruppi	Valori medi di $\delta q^2 = q^2 - 0,10$	Calcolo della media $(\delta q^2)_m$ dei valori $\delta q^2$				Calcolo dell'errore medio $\mu$ di $(\delta q^2)_m$ in unità del 5° ord. decimale		
			errore medio di $\delta q^2$ in unità del 5° ord. dec.	peso corrispondente $p = \frac{100}{e^2}$	$p \delta q^2$ in unità del 5° ord. dec.	$(\delta q^2)_m$	scostamenti dalla media $\alpha$	$p \alpha^2$	$\mu$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18 255	1 e 2	+ 0.00017	± 5.85	2.9	+ 49	+ 0.00005	+ 12	417	± 1,9
	2 e 3	+ 10	5.23	3.7	+ 36		+ 5	91	
	3 e 4	+ 0	2.59	15.0	+ 0		- 5	370	
	1 e 3	+ 11	3.36	8.8	+ 97		+ 6	319	
	2 e 4	+ 3	2.27	19.4	+ 58		- 2	78	
	1 e 4	+ 5	2.18	21.1	+ 105		0	0	
			$[p] = 70.8$	$[p \delta q^2] = + 345$	$[p \alpha^2] = 1275$				
18 938	1 e 2	- 0.00024	± 2.23	20.0	- 480	- 0.00017	- 7	980	± 1,1
	2 e 3	- 13	3.27	9.4	- 122		+ 4	150	
	3 e 4	- 16	2.78	11.7	- 187		+ 1	12	
	1 e 3	- 17	1.23	65.6	- 1120		0	0	
	2 e 4	- 14	1.50	44.2	- 620		+ 3	398	
	1 e 4	- 17	1.05	91.4	- 1560		0	0	
			$[p] = 242.3$	$[p \delta q^2] = - 4089$	$[p \alpha^2] = 1540$				
18 989	1 e 2	+ 0.00001	± 2.71	13.6	+ 14	- 0.00013	+ 14	2660	± 2,4
	2 e 3	- 7	3.16	10.0	- 70		+ 6	360	
	3 e 4	- 19	1.88	52.5	- 1000		- 6	1890	
	1 e 3	- 4	2.55	15.4	- 62		+ 9	1250	
	2 e 4	- 15	1.14	76.5	- 1115		- 2	306	
	1 e 4	- 11	1.45	69.0	- 760		+ 2	276	
			$[p] = 237.0$	$[p \delta q^2] = - 2993$	$[p \alpha^2] = 6742$				
18 996	1 e 2	- 0.00015	± 2.31	18.7	- 280	- 0.00014	- 1	19	± 1,20
	2 e 3	- 8	2.06	23.6	- 489		+ 6	850	
	3 e 4	- 20	2.58	15.0	- 300		- 6	540	
	1 e 3	- 11	1.45	47.8	- 526		+ 3	430	
	2 e 4	- 14	1.38	52.5	- 736		0	0	
	1 e 4	- 15	0.94	113.5	- 1700		- 1	113	
			$[p] = 271.1$	$[p \delta q^2] = - 3731$	$[p \alpha^2] = 1952$				
19 004	1 e 2	+ 0.00010	± 1.48	45.7	+ 457	+ 0.00011	- 1	46	± 0,95
	2 e 3	+ 16	2.46	16.5	+ 265		+ 5	412	
	3 e 4	+ 7	2.51	15.9	+ 111		- 4	254	
	1 e 3	+ 11	1.92	27.1	+ 298		0	0	
	2 e 4	+ 11	1.90	27.8	+ 306		0	0	
	1 e 4	+ 12	1.75	32.6	+ 391		+ 1	33	
			$[p] = 165.6$	$[p \delta q^2] = + 1828$	$[p \alpha^2] = 745$				
17 841	1 e 2	- 0.00027	± 3.69	7.3	- 198	+ 0.00004	- 31	7060	± 7,5
	2 e 3	- 3	2.86	12.2	- 37		- 7	490	
	3 e 4	+ 29	2.53	15.7	+ 455		+ 25	9800	
	1 e 3	+ 13	2.28	19.3	- 251		- 17	5600	
	2 e 4	+ 15	2.31	18.7	+ 281		+ 11	2260	
	1 e 4	+ 6	2.35	18.0	+ 108		+ 2	72	
			$[p] = 91.2$	$[p \delta q^2] = + 358$	$[p \alpha^2] = 25282$				
17 845	1 e 2	- 0.00032	± 3.78	7.0	- 224	- 0.00004	- 28	5480	± 4,5
	2 e 3	- 8	1.77	32.0	- 256		- 4	512	
	3 e 4	+ 15	1.94	26.6	+ 399		- 19	9600	
	1 e 3	+ 18	1.29	60.0	- 1080		- 14	11800	
	2 e 4	+ 5	1.17	72.5	+ 362		+ 9	5900	
	1 e 4	- 4	0.86	135.5	- 542		0	0	
			$[p] = 333.6$	$[p \delta q^2] = - 1341$	$[p \alpha^2] = 33292$				
17 848	1 e 2	- 0.00001	± 4.15	5.8	- 6	+ 0.00050	- 57	18000	± 11,2
	2 e 3	+ 37	2.79	12.9	+ 477		- 19	4650	
	3 e 4	+ 40	1.70	34.8	+ 3130		+ 34	40200	
	1 e 3	+ 21	2.29	19.1	+ 400		- 35	23500	
	2 e 4	+ 66	1.80	30.9	+ 2040		+ 10	3090	
	1 e 4	+ 51	1.52	43.3	+ 2210		- 5	1080	
			$[p] = 146.8$	$[p \delta q^2] = + 8251$	$[p \alpha^2] = 91320$				



Lo specchio *B* dà i valori misurati di *R* e di *r*. — I valori di *R* sono gli stessi per tutti i planimetri, una stessa lastra di zinco cogli stessi punti *P, F, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub>, . . . .* avendo servito per tutti gli strumenti verificati.

Per ogni planimetro lo specchio *B* comprende 28 valori di *R* e di *r* corrispondenti a 28 posizioni dello strumento, divise in quattro gruppi di 7 posizioni ciascuna.

Le posizioni di ciascun gruppo distinte colle lettere *a, b, c, d, e, f, g* sono vicinissime fra loro, talchè i valori di *r* corrispondenti alle posizioni estreme *a, g* non differiscono che di 5 m. m. circa. (1) Fra un gruppo e il successivo invece i valori di *r* corrispondenti alle stesse lettere differiscono di 25 m. m. circa in cifra tonda.

Lo specchio *C* dà per uno dei planimetri (il n.° 18988) i particolari dei calcoli. La colonna intitolata  $\Delta R^2$  contiene le differenze dei quadrati dei valori di *R* relativi a due posizioni del planimetro appartenenti a due gruppi diversi e distinte colle stesse lettere: la colonna intitolata  $10 \Delta r^2$  contiene il decuplo della differenza analoga per i valori di *r* corrispondenti.

Se il pantografo non avesse difetti di costruzione dovrebbe essere

$$q^2 = \frac{\Delta r^2}{\Delta R^2} = 0,10, \text{ cioè } 10 \Delta r^2 - \Delta R^2 = 0.$$

In cause delle piccole imperfezioni del pantografo e degli errori di osservazione o di misura la differenza  $10 \Delta r^2 - \Delta R^2$  non è nulla, e la col. 5 ne dà il valore. La col. 6 dà i valori corrispondenti di

$$q^2 - 0,10 = \frac{10 \Delta r^2 - \Delta R^2}{\Delta R^2}$$

e la loro media aritmetica  $\delta q^2$  calcolata per ognuna delle sei combinazioni dei gruppi due a due. — Le col. 7, 8, 9 contengono il calcolo dell'errore medio *e* delle medie  $\delta q^2$ .

L'aggruppamento scelto per le posizioni del planimetro permette di tenere distinte le variazioni eventuali della differenza  $q^2 - 0,10$  dovute alle imperfezioni del pantografo dalle variazioni dovute agli errori di osservazione, le quali avendo pressochè lo stesso ordine di grandezza delle prime potrebbero altrimenti mascherare il fenomeno che è oggetto dello studio.

Difatti le differenze che presentano fra loro i sette valori di  $q^2 - 0,10$  di ogni combinazione sono da attribuirsi, si può dire esclusivamente, agli errori di osservazione; le posizioni dello strumento essendo troppo vicine fra loro perchè l'influenza delle eventuali piccole imperfezioni del pantografo possano rendersi sensibili. — Inversamente le differenze che presentano fra loro le sei medie  $\delta q^2$  dei valori di  $q^2 - 0,10$  per le sei combinazioni dei 4 gruppi due a due saranno da attribuirsi esclusivamente o quasi alle imperfezioni del pantografo, potendo le medie considerarsi come liberate dagli errori di osservazione, a meno un piccolo errore.

Come criterio per valutare l'importanza di questo errore residuo serve l'errore medio *e* di  $\delta q^2$ .

Lo specchio *D* contiene per tutti i planimetri sperimentali i risultati riassuntivi dei calcoli dei sei valori medi di  $\delta q^2 = q^2 - 0,10$ , della loro media  $(\delta q^2)_m$ , e del-

(1) È bene che le traccie *f* appartenenti ad uno stesso gruppo siano, quanto più è possibile, vicine fra loro. Consigliamo a ridurre a poco più di 2 mm. la distanza fra i punti estremi di uno stesso gruppo.

l'errore medio  $r$  di questa media, la quale è stata calcolata empiricamente, considerando i sei valori di  $\delta q^2$  come indipendenti.

10. — Fermiamoci ad analizzare i risultati registrati nell'ultimo specchio  $D$ .

I primi cinque planimetri, nuovi di fabbrica quando vennero sperimentati, hanno dato risultati sodisfacenti; e taluni fra essi risultati ottimi i quali rivelano una costruzione accuratissima del meccanismo del pantografo. — Così per i planimetri 18988, 18996, 19004 le discrepanze  $x$  (colonna 8) fra i valori definitivi di  $q^2 - 0,10$  (col. 7) ed i valori particolari valevoli per le diverse aperture del planimetro (col. 3) salgono al massimo a 7 unità del 5.<sup>o</sup> ordine decimale e possono attribuirsi agli errori di osservazione perchè sono di poco superiori agli errori medi  $e$  (col. 4). — Per questi planimetri il valore di  $q^2$  si può ritenere costante nei limiti di apertura sperimentati; limiti più larghi di quelli che nell'uso pratico del planimetro conviene mantenere.

Nei due planimetri nuovi 18 255, 18 989 il valore di  $\delta q^2$  valevole per la combinazione formata dai gruppi 1 e 2, cioè valevole quando la figura da misurarsi è tale che la distanza  $r$  varia dall'incirca 40 a 65 mm., differisce alquanto dagli altri valori di  $\delta q^2$ ; e la differenza è superiore ai possibili errori di osservazione. Per questi planimetri i risultati che si otterranno misurando una figura due volte, l'una col polo vicino, l'altra col polo lontano potranno differire di 1 a 2 millesimi circa del loro valore. Una figura nelle indicate condizioni cioè compresa in un segmento di zona circolare di 25 mm. di spessore, col raggio minore di 40 mm. non avrà d'ordinario che un'area inferiore o di poco superiore ai 1000 mm.<sup>2</sup>. Quindi la discrepanza fra le due misure sarà al massimo di 1 a 2 unità del nonio.

Nei planimetri usati 17 841 e 17 845 le discrepanze sono alquanto più sensibili. — Esse derivano molto probabilmente da piccole inflessioni subite dai bracci durante il maneggio degli strumenti, (fatto non sempre colla dovuta delicatezza) in seguito alle quali inflessioni i calcatoi e il polo più non si trovano esattamente sulle direzioni dei lati del quadrilatero articolato. — Le discrepanze possono raggiungere 4 a 5 millesimi del valore dell'area per le aree piccole (alle quali corrispondono le combinazioni formate dai gruppi 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4); e per le aree più grandi (combinazioni formate dai gruppi 1 e 3, 2 e 4) 2 a 3 millesimi. Con questi planimetri, quando si abbia l'avvertenza (consigliata pure da altre considerazioni) di eseguire sempre due misure l'una col polo vicino alla figura, l'altra col polo lontano, e di prendere la media dei due risultati, l'errore residuo dovuto all'imperfezione del pantografo si riduce a poca cosa e diviene trascurabile.

Le maggiori discrepanze sono presentate dal planimetro 17 848 nel quale le deformazioni dei bracci (dovute senza dubbio a insufficiente delicatezza di maneggio in chi lo ha adoperato) devono essere piuttosto forti, poichè il valore di  $q^2 - 0,10$  varia, secondo la posizione del polo e l'ampiezza dell'angolo descritto dai bracci viaggianti, da un minimo di 0.00001 ad un massimo di 0.00090.

Questo strumento non è più adatto che per la misura di aree piccole di 200 o 300 mm.<sup>2</sup> al più, e dovrà essere consegnato al costruttore per le riparazioni.

Si osserverà che il valore medio definitivo di  $q^2 - 0,10$  (col. 7) non è zero per nessuno dei planimetri sperimentati. — Ciò dipende da due cause. La prima è che gli elementi  $D$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $L_0$ ,  $d_0$  forniti dal costruttore, per quanto accurata sia stata la loro determinazione, non possono condurre ad una valutazione del valore

di  $q^2$  così precisa come quella esposta: la seconda sta in ciò, che nella lettura del nonio dei bracci viaggianti non è possibile un' approssimazione superiore ai due o tre centesimi di millimetro, alla quale corrisponde un' approssimazione di 5 unità circa del 5° ordine del valore  $q^2$ .<sup>(1)</sup>

Si noterà pure che il valore medio definitivo di  $q^2 = 0,10$  concorda quasi esattamente col valore dedotto dei gruppi 1 e 4. Vedremo più oltre che questa concordanza non è casuale, e che anzi, quando i detti gruppi soddisfino a certe condizioni, il valore di  $q^2$  che essi somministrano debba ritenersi come il vero valore medio del rapporto  $\frac{\omega}{n}$ .

11. — Si scorge dall' analisi fatta quale importanza abbia nell' impiego del planimetro pantografo la determinazione del rapporto  $q^2$ .

Anzitutto essa dà il mezzo di riconoscere se sono verificate le condizioni alle quali il pantografo deve soddisfare. Dà in seguito e con una grande precisione il valore del coefficiente di  $n$  della formola del pantografo, o almeno dà un valore proporzionale a quel coefficiente, dispensandoci dal conoscere le dimensioni dello strumento le quali sarebbero di difficile determinazione. — Nel caso poi in cui, per piccole imperfezioni di costruzione, il rapporto  $q^2$  non sia rigorosamente costante per tutte le aperture del planimetro ci indica i limiti di apertura che non devono essere oltrepassati e ci dà un criterio per giudicare la precisione del numero che si assume come valore medio di  $q^2$  e per stabilire i limiti di grandezza delle figure misurabili convenientemente col pantografo.

### **Caso in cui il polo ed i calcatoi non si trovano esattamente sulla direzione dei lati del quadrilatero articolato.**

12. — Le piccole discrepanze che si verificano nei valori del rapporto  $q^2$  sono dovute principalmente a lievi inflessioni dei bracci polare e viaggianti, in seguito alle quali il polo e i due calcatoi deviano alquanto dalle direzioni dei lati del quadrilatero articolato.

Gioverà pertanto riprendere la teoria del pantografo per tener conto di questi spostamenti.

Siano (fig. 3)  $a$  ed  $a + \delta a$ ,  $b$  e  $b + \delta b$  i lati del quadrilatero articolato: siano poi  $\delta h$ ,  $\delta f$ ,  $\delta F$  rispettivamente gli spostamenti, non rappresentati in figura, dei punti  $n$ ,  $f$ ,  $F$  dalla direzione sulla quale i medesimi dovrebbero trovarsi normalmente. Questi spostamenti si considerino come positivi quando sono diretti da destra a sinistra, secondo il movimento degli indici di un orologio.

Noi supporremo che  $\delta a$ ,  $\delta b$ ,  $\delta h$ , ecc. siano quantità molto piccole, e intenderemo sempre trascurabili nei singoli sviluppi le loro potenze superiori alla prima.

In questa ipotesi gli effetti dell' insieme di quegli spostamenti si otterranno calcolando separatamente gli effetti dovuti ad ogni singolo spostamento considerato

---

(1) Nei planimetri pantografi nei quali i bracci viaggianti non sono muniti di nonio, la posizione di questi bracci non si può regolare che coll' approssimazione di 1 a 2 decimi di millimetro al più, alla quale corrisponde l' approssimazione del 2 al 3 per mille, circa, nel valore del rapporto  $q^2$ . Ciò restringe i limiti di grandezza delle figure misurabili col calcatoio del pantografo in quegli strumenti.

come operante da solo, e sommando tutti i risultati Sarà perciò facile il verificare che la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto  $f$  spostato sulla retta  $PN$  vale :

$$a \operatorname{sen} \varphi + \frac{d}{b} \frac{\delta a}{\operatorname{sen} \varphi} - \frac{d}{b} \frac{\delta b}{\tan \varphi} - \frac{d}{b} \delta h - \delta f,$$

e che la distanza del piede di questa perpendicolare dal polo  $P$  non sente l' influenza di alcuno degli spostamenti considerati e vale

$$D - d - a \cos \varphi$$

Ne deduciamo

$$\overline{P\bar{f}}^2 = r^2 = a^2 + (D - d)^2 - 2a(D - d) \cos \varphi + 2ad \frac{\delta a - \delta b \cos \varphi}{b} - 2ad \left( \frac{\delta h}{b} + \frac{\delta f}{d} \right) \operatorname{sen} \varphi.$$

Parimenti si troverà :

$$\overline{P\bar{F}}^2 = R^2 = L^2 + D^2 - 2LD \cos \varphi - 2D\delta F \operatorname{sen} \varphi$$

Le aree  $\omega$  ed  $\Omega$  circoscritte simultaneamente dai due calcolati si possono esprimere, come si è visto al n. 6, colle eq.

$$(11') \quad \omega = \int \theta r. dr, \quad \Omega = \int \theta R. dR.$$

Perciò, avuto riguardo alle espressioni testè scritte di  $r^2$  e di  $R^2$  :

$$\omega = a \left( D - d + \frac{\delta b}{b} d \right) \int \theta \operatorname{sen} \varphi d\varphi - ad \left( \frac{\delta h}{b} + \frac{\delta f}{d} \right) \int \theta \cos \varphi d\varphi$$

$$\Omega = LD \int \theta \operatorname{sen} \varphi d\varphi - D. \delta F \int \theta \cos \varphi. d\varphi.$$

Dividendo membro a membro queste eq., sviluppando il divisore, e conservando nello sviluppo la sola prima potenza di  $\delta F$ , otterremo :

$$(3'') \dots \dots \frac{\omega}{\Omega} = \frac{a(D-d)}{LD} + \frac{ad}{LD} \frac{\delta b}{b} - \frac{ad}{LD} \left( \frac{\delta h}{b} + \frac{\delta f}{d} - \frac{D-d}{d} \frac{\delta F}{L} \right) \frac{\int \theta \cos \varphi. d\varphi}{\int \theta \operatorname{sen} \varphi. d\varphi}.$$

Se si suppongono nulli gli spostamenti  $\delta h$ ,  $\delta f$ ,  $\delta F$  il secondo membro dell'eq. (3'') si riduce ai suoi due primi termini e l'eq. risultante corcorda (salvo una differenza dell'ordine di grandezza di  $\frac{\delta b^2}{b^2}$ ) coi risultati ottenuti al n. 3, e conferma il teorema dimostrato in quel numero, che cioè, se le disequaglianze  $\delta a$ ,  $\delta b$  nei lati opposti del quadrilatero sono piccole, il rapporto  $\frac{\omega}{\Omega}$  non cessa di essere costante.

Se  $\delta h$ ,  $\delta f$ ,  $\delta F$  non sono nulli detto rapporto varia col variare dell' apertura del planimetro, cioè coll'angolo  $\varphi$ , e col variare delle figure che si misurano.

Possiamo formarci un'idea approssimativa del modo in cui il rapporto  $\frac{\omega}{\Omega}$  varia col variare dell'angolo  $\varphi$  supponendo che l'ampiezza  $\theta$  delle zone circolari elementari formanti le aree  $\omega$  ed  $\Omega$  sia costante. In tal caso ponendo :

$$\frac{a(D-d)}{LD} + \frac{ad}{LD} \frac{\delta b}{b} = q_0^2$$

$$\frac{ad}{LD} \left( \frac{\delta h}{b} + \frac{\delta f}{d} - \frac{D-d}{d} \frac{\delta F}{L} \right) = K$$

e indicando con  $\varphi$  e  $\varphi'$  i limiti degli integrali che figurano nella eq. (3''), questa diviene :

$$\frac{\omega}{\Omega} = q_0^2 + K \frac{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'}$$

Ora ricordando le espressioni di  $r^2$  e di  $R^2$ , e detti  $r'$ ,  $R'$  i valori di  $r$ ,  $R$  corrispondenti al valore  $\phi'$  dell'angolo  $\phi$  si troverà facilmente che, nell'ordine di approssimazione propostoci,

$$\frac{r^2 - r'^2}{R^2 - R'^2} = q^2 + K \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \phi'}{\cos \phi - \cos \phi'}$$

Quindi, rappresentando con  $q^2$  il consueto rapporto delle differenze dei quadrati dei raggi, avremo :

$$(3''') \dots \dots \dots q^2 = q_0^2 + K \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \phi'}{\cos \phi - \cos \phi'}$$

Quest' eq. mette in evidenza la legge con cui il rapporto  $q^2$ , che approssimativamente è pure il rapporto delle aree  $\omega$ ,  $\omega'$ , varia col variare dell'apertura del planimetro. Ponendo  $\phi' = 180^\circ - \phi$  l'eq. (3''') dà

$$q^2 = q_0^2$$

qualunque sia  $\phi$ .

Se agli angoli  $\phi$ ,  $\phi'$  sostituiamo i loro supplementi  $180 - \phi$  e  $180 - \phi'$ , il nuovo valore di  $q^2$  che ne risulta, sarà :

$$(3^{IV}) \dots \dots \dots q^2 = q_0^2 - K \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \phi'}{\cos \phi - \cos \phi'}$$

Dunque la media aritmetica dei due valori (3''') e (3<sup>IV</sup>) di  $q^2$ , corrispondenti a valori supplementari di  $\phi$ , e di  $\phi'$  è costante ed eguale a  $q_0^2$ .

Per questi motivi il valore  $q_0^2$ , che è quello che si otterrebbe in base alle dimensioni dello strumento colla formula (1') del n. 7, astraendo dagli spostamenti  $\delta h$ ,  $\delta f$ ,  $\delta F$ , si può considerare come il vero valore medio del rapporto  $\frac{\omega}{\Omega}$ .

La differenza fra i due valori (3''') e (3<sup>IV</sup>) vale

$$2 K \frac{\text{sen } \phi - \text{sen } \phi'}{\cos \phi - \cos \phi'}$$

Essa va crescendo a misura che gli angoli  $\phi$  e  $\phi'$  supposti ambedue minori di  $90^\circ$ , diminuiscono, e a misura che diminuisce la differenza  $\phi' - \phi$ . Al limite, quando  $\phi' = \phi$  quella differenza prende il valore

$$2 K \cotan. \phi.$$

Se poniamo  $\phi' = 90 - \phi$  quella differenza si riduce a  $2k$  e fornisce così un modo semplice per misurare la costante  $k$ , la quale è il vero criterio per giudicare della maggiore o minore perfezione del pantografo.

13. — Da queste proprietà del rapporto  $q^2$  scaturiscono due conseguenze.

L'una riflette la distribuzione più conveniente dei gruppi di punti che secondo il procedimento esposto al n. 8 devono servire alla determinazione del rapporto  $q^2$ . Scelto per l'apertura minima del planimetro un dato angolo  $\phi$ , per es.  $\phi = 35^\circ$  (1) converrà disporre i gruppi dei punti in modo che in media, cioè per il punto di mezzo di ciascun gruppo, l'angolo  $\phi$  risulti di  $35^\circ$  circa per il 1° gruppo; di  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ , per il 2°; di  $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$  per il 3°; e di  $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$  per il 4°.

(1) Questo angolo può servire per la ricerca del valore di  $q^2$  ma sarebbe troppo piccolo nell'uso del planimetro. In pratica non conviene scendere al disotto di  $45^\circ$ .

Allora il valore di  $q^2$  che si otterrà combinando i gruppi estremi 1 e 4 sarà lo stesso valore medio  $q_0^2$  che si cerca. I gruppi intermedi 2 e 4 e la media dei due valori ottenuti dal gruppo 3 e 4, e dal gruppo 1 e 2 daranno pure altri due valori di  $q_0^2$  che serviranno di controllo. La differenza poi fra i due valori di  $q^2$  ottenuti dai gruppi 1 e 2 e dai gruppi 3 e 4 darà il doppio del valore di  $K$ .

Nelle verifiche, i cui risultati sono registrati negli specchi  $A, B, C, D$ , i gruppi dei punti, distribuiti con altri criteri, non soddisfano alle condizioni sopra esposte. Però i gruppi estremi 1 e 4 corrispondono a valori di  $\varphi$  che sono poco lontani dall'essere supplementari. Ciò spiega il perchè in tutti i planimetri il valore medio di  $q^2$  è quasi identico al valore dedotto dai gruppi 1 e 4.

L'altra conseguenza riflette il modo d'impiego del pantografo nella misura delle aree. Se il valore di  $q^2$  non è esattamente costante conviene combinare le misure due a due, cambiando la posizione del polo, in modo che i valori estremi di  $\varphi$  in una posizione siano (giudicati a vista) supplementari di quelli dell'altra.

Per le aree grandi, per le quali la distanza del polo dalla figura non può variare che fra ristretti limiti, il polo si disporrà in guisa che i valori estremi di  $\varphi$  siano (sempre giudicati a vista) supplementari l'uno dell'altro. In tal modo si elimineranno o si attenueranno le conseguenze dell'eventuale variabilità del rapporto  $q^2$ .

### Determinazione delle lunghezze normali dei bracci viaggianti.

14. — Diremo *lunghezze normali* dei bracci viaggianti quelle alle quali corrispondono valori dell'unità del nonio prestabiliti ed espressi da numeri rotondi.

Per fissare le idee supporremo si tratti di determinare la lunghezza normale  $L_0$  del braccio principale, per la quale il valore dell'unità del nonio è 10; e quella  $d_0$  del braccio del pantografo per la quale l'unità del nonio è 1.

Ponendo  $\alpha = 10 n$  nell'eq. (2)

$$(2) \quad \alpha = 100 \frac{L}{l} n,$$

ricaviamo il seguente valore di  $L = L_0$

$$(12) \quad L_0 = \frac{l}{10}.$$

Parimenti ponendo  $\omega = n$  nell'eq. (3') :

$$(3') \quad \omega = 100 \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{b}{b'} \frac{D}{d} \right) n,$$

ricaviamo il seguente valore di  $d = d_0$

$$(13) \quad d_0 = D \left( 1 - \frac{l}{100 a} \right) \frac{b'}{b}.$$

Si tratta di determinare sperimentalmente i valori di  $L_0$  e di  $d_0$ .

Siano  $L_0'$  e  $d_0'$  valori approssimati di  $L_0$  e di  $d_0$  quali si ottengono ad esempio adottando per  $l, a, b, b', D$  i valori dati dal costruttore, e cerchiamo, le correzioni  $\delta L_0', \delta d_0'$  da introdursi nei valori  $L_0', d_0'$  per portarli al valore definitivo cercato.

— Posti i bracci in modo che gli zeri dei loro noni segnino rispettivamente le lunghezze  $L'_0$  e  $d'_0$  si determini nel modo spiegato ai n.ri 9 e 10 il rapporto  $q^2$ , indi impiegando il calcoio  $F$  del braccio principale si misuri più volte un'area di prova  $\Omega$  determinata con precisione in precedenza.

Il numero medio  $n$  delle unità del nonio segnate dalla rotella sarà poco diverso da  $\frac{\Omega}{10}$  e la differenza

$$\Delta = \Omega - 10n$$

sarà piccola, perchè  $L'_0$  è, per ipotesi, molto prossimo a  $L_0$ . — L'eq. (2) dovendo essere soddisfatta ponendovi  $L = L'_0$ ,  $n = \frac{\Omega - \Delta}{10}$  darà:

$$\Omega = 100 \frac{L'_0}{10l} (\Omega - \Delta);$$

da cui ricaviamo il seguente valore di  $\frac{l}{10}$  che è il valore cercato di  $L_0$ .

$$L_0 = L'_0 + \delta L'_0,$$

ove

$$(14) \quad \delta L'_0 = -L'_0 \frac{\Delta}{\Omega}.$$

È ovvio che invece di una sola area di prova  $\Omega$  convenga impiegarne diverse  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ , calcolare le differenze corrispondenti  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ , ed assumere come valore definitivo di  $\frac{\Delta}{\Omega}$  la media  $\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right)_m$  dei rapporti  $\frac{\Delta_1}{\Omega_1}, \frac{\Delta_2}{\Omega_2}, \frac{\Delta_3}{\Omega_3}, \dots$ .

Passiamo al pantografo. Mentre il calcoio  $F$  percorre il perimetro dell'area  $\Omega$  il calcoio  $f$  circonda l'area (1)  $\omega = q^2 \Omega$  che noi sappiamo calcolare, poichè  $q^2$  è noto.

Poniamo:

$$\delta = q^2 \Omega - n.$$

Anche  $\delta$  sarà una quantità piccola poichè  $n$  per ipotesi, non può differire che di poco da  $q^2 \Omega$  — L'eq. (3') dovendo essere soddisfatta ponendovi  $d = d'_0$ ,  $\omega = q^2 \Omega$ ,  $n = q^2 \Omega - \delta$ , avremo:

$$q^2 \Omega = 100 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{b}{b'} \frac{d'_0}{D}\right) (q^2 \Omega - \delta);$$

da cui ricaviamo:

$$D \left(1 - \frac{l}{100a}\right) \frac{b'}{b} = b'_0 + \left(\frac{b'}{b} D - d'_0\right) \frac{\delta}{q^2 \Omega},$$

e per l'eq. (13):

$$d_0 = d'_0 + \delta d'_0,$$

ove

$$\delta d'_0 = \left(\frac{b'}{b} D - d'_0\right) \frac{\delta}{q^2 \Omega}.$$

(1) Area virtuale, poichè nelle prove il calcoio  $f$  si toglie dal suo astuccio.

Possiamo nell'ultima equazione scambiare l'una coll'altra le lunghezze  $b$ ,  $b'$ , poichè il termine in cui esse figurano è molto piccolo; quindi senza nuocere alla generalità della formola è lecito scrivere

$$(15) \quad \delta d'_0 = (D - d'_0) \frac{\delta}{q^2 a}.$$

Le eq. (14) e (15) risolvono il problema.

Trovata la correzione  $\delta L_0$  di  $L'_0$ , e noto  $q^2$ , la correzione  $\delta d'_0$  di  $d'_0$  si ottiene in modo più sicuro e più semplice senza passare per il calcolo di  $\delta$  come segue.

Sia

$$q^2 = 0,10 + \delta q^2$$

il valore del rapporto  $q^2$  quando i bracci viaggianti hanno le lunghezze provvisorie  $L'_0$ ,  $d'_0$  sperimentate.

Sappiamo per l'eq (1') del n.º 7 che (supposto  $b = b'$ )

$$(16) \quad q^2 = 0,10 + \delta q^2 = \frac{a}{L'_0} \left(1 - \frac{d'_0}{D}\right).$$

La correzione  $\delta L'_0$  trovata per la lunghezza  $L'_0$  e la correzione  $\delta d'_0$  che si cerca per la lunghezza  $d'_0$  devono essere tali che il rapporto  $q^2$  che loro corrisponde sia esattamente eguale a 0,10. Dette correzioni devono quindi soddisfare alla condizione

$$(17) \quad 0,10 = \frac{a}{L'_0 + \delta L'_0} \left(1 - \frac{d'_0 + \delta d'_0}{D}\right)$$

Sottraendo membro a membro le eq. (16) (17) dopo averle moltiplicate la 1.<sup>a</sup> per  $L'_0$  la 2.<sup>a</sup> per  $L'_0 + \delta L'_0$ , e semplificando si troverà

$$\delta d'_0 = \frac{D}{a} L'_0 \delta q^2 - 0,10 \frac{D}{a} \delta L'_0.$$

Le dimensioni dei planimetri oscillano con lievi variazioni attorno ai seguenti valori:  $D = 240$ ,  $a = 65,6$ ,  $L'_0 = 166,5$ ; quindi l'eq. precedente diviene:

$$(18) \quad \delta d'_0 = 610 \delta q^2 - 0,37 \delta L'_0.$$

15. — Il movimento del calcoio nella misura delle aree di prova deve essere fatto meccanicamente affine di evitare gli errori di percorso del perimetro.

A questo scopo è posto a corredo di ogni planimetro una riga piatta di metallo, di forma nota, la quale permette di far descrivere al calcoio una circonferenza di circolo, l'area del quale è data da un numero inciso sulla stessa riga.

Si potrà rideterminare l'area di questo circolo con maggior precisione misurandone il raggio col metro comparatore a microscopi micrometrici.

16. — *Esempio.* — Il planimetro 18 989 pel quale (n.º 9 specchi  $A$  e  $C$ )  $L'_0 = 166,50$   $d'_0 = 179,56$ ,  $q^2 = 0,10 - 0,00013$  venne provato con cinque righe ripetendo la misura 10 volte per ogni riga, 5 col polo vicino e 5 col polo lontano.

I risultati sono registrati nello specchio seguente.

Il raggio delle righe era stato misurato con tutta accuratezza; per cui nella valutazione del pesodi  $\frac{\Delta}{a}$  l'errore di cui possono essere affette le aree  $a$  è da trascurarsi in confronto all'errore medio di  $n$ .



$\alpha$ mm. <sup>3</sup>	Media dei valori di $n$ .	$\Delta =$ $= \alpha - 10 n$	$\frac{\Delta}{\alpha}$	Errore medio della media di $n$ . $e$	Peso corrispondente di $\frac{\Delta}{\alpha}$ $p = \frac{1}{e^2}$	$p \frac{\Delta}{\alpha}$
20.214	2022.8	— 14	— 0.0007	$\pm 0.200$	25.0	— 0.0175
	2024.4	— 30	— 0.0015	0.245	16.7	— 0.0250
20.071	2009.2	— 21	— 0.0010	0.200	25.0	— 0.0250
	2009.4	— 23	— 0.0011	0.245	16.7	— 0.0184
20.028	2005.0	— 22	— 0.0011	0.316	20.0	— 0.0220
	2007.4	— 46	— 0.0023	0.245	16.7	— 0.0385
20.068	2011.4	— 46	— 0.0023	0.510	3.8	— 0.0087
	2011.8	— 50	— 0.0025	0.200	25.0	— 0.0625
20.033	2006.4	— 31	— 0.0015	0.245	16.7	— 0.0250
	2006.8	— 35	— 0.0017	0.200	25.0	— 0.0425

$$[p] = 190.6 \quad \left[ p \frac{\Delta}{\alpha} \right] = -0.2851$$

$$\left( \frac{\Delta}{\alpha} \right)_m = \frac{[p \frac{\Delta}{\alpha}]}{[p]} = -\frac{0.2851}{190.6} = -0.0015$$

$$\delta L'_0 = -166,50 \times (-0,0015) = +0,25$$

$$L_0 = 166,50 + 0,25 = 166,75$$

$$\delta d'_0 = 610 \times (-0,00013) - 0,37 \times (+0,25)$$

$$= -0,079 - 0,092 = -0,17$$

$$d_0 = 179,56 - 0,17 = 179,39$$

17. — La via seguita per determinare la lunghezza normale tanto del braccio del planimetro come quella del pantografo consiste nel partire da valori approssimati  $L'_0$  e  $d'_0$  di quelle lunghezze calcolate comunque e nel determinare le correzioni rispettive. Questo procedimento ha il vantaggio di ridurre al minimo, anzi da eliminare quasi completamente, l'influenza degli errori di cui possono essere affetti gli elementi numerici  $l$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $b'$ , dati dal costruttore, e le scale graduate tracciate sui bracci.

Infatti le correzioni calcolate sono sempre molto piccole; esse perciò saranno sempre determinate con esattezza sufficiente anche quando gli elementi da cui derivano non abbiano che un'approssimazione appena discreta.

Le lunghezze normali  $L_0$ ,  $d_0$  lette sulla scala saranno poi quelle che rispondono alle condizioni volute anche quando la graduazione dei bracci non sia esatta, purchè l'inesattezza non sia tale da influire sui brevi intervalli compresi fra le letture provvisorie  $L'_0$ ,  $d'_0$ , e le letture definitive  $L_0$ ,  $d_0$ .

Quando non sono molte le lunghezze normali da determinarsi, e ciò è quanto si verifica nel caso delle mappe catastali, il procedimento esposto è, a mio avviso, da preferirsi a quello suggerito dal prof. F. Lorber in una pregevole memoria spesso citata, <sup>(1)</sup> il quale procedimento consiste nel determinare con molte prove (col metodo dei minimi quadrati) i coefficienti di una equazione che dà il valore dell'unità del nonio per una lunghezza qualunque del braccio letta sulla scala graduata.

(1). Ein Beitrag zur Justirung des Polarplanimeters. — *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1883.

Se la graduazione della scala non è perfettamente uniforme, gli errori che derivano da questa non uniformità si riverberano sui coefficienti dell'equazione che si tratta di stabilire, e il valore dell'unità del nonio calcolato con essa per una data lunghezza del braccio si risentirà anche degli errori che affettano la graduazione per tutte le altre lunghezze.

Per quanto poi riflette il pantografo in particolare si osserverà, che la determinazione della lunghezza normale  $d_0$  si fa cogli stessi dati  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  e colle stesse osservazioni  $n_1, n_2, \dots$  che servono per la determinazione della lunghezza normale  $L_0$  del planimetro. Quindi il metodo descritto è certamente il più appropriato per ottenere che fra le indicazioni del planimetro e quelle del pantografo sia mantenuta quella costanza di rapporto, che è condizione indispensabile quando in uno stesso foglio di mappa si usa promiscuamente l'uno o l'altro dei due bracci, a seconda della grandezza delle figure che si vogliono misurare.

### Metodi per tener conto della variazione subita dalle dimensioni dei fogli di mappa.

18. — Nella determinazione delle aree delle particelle catastali si presenta quasi sempre la necessità di tener conto del cambiamento (piccolo<sup>ma</sup> non trascurabile) avvenuto nella scala del disegno per effetto della dilatazione o del restringimento subito dai fogli di mappa.

In più modi si può tener conto di questo cambiamento.

Si può fare astrazione dalla scala del foglio di mappa ed usare il planimetro come semplice contatore applicandolo alla misura delle particelle del foglio, e, in pari tempo, a quella di un aggregato di particelle e di frazioni di particelle comprendente l'intero foglio di mappa o buona parte di esso, ed avente una figura geometrica di area facilmente calcolabile. Il confronto di quest'area (che si calcolerà tenendo conto della scala effettiva del disegno) col n° segnato dal planimetro nel misurarla darà il valore dell'unità del nonio.

Ovvero si può tener conto preventivo della scala effettiva del foglio di mappa regolando convenientemente la lunghezza dei bracci viaggianti del planimetro.

Questa regolazione si ottiene molto facilmente quando i fogli di mappa sono quadrettati ed i planimetri hanno i bracci viaggianti graduati e muniti di nonio.

Sia  $100 + \varepsilon$  la lunghezza in millimetri del lato del quadretto medio del foglio e siano 10 ed 1 i valori che si intende di scegliere per l'unità del nonio del planimetro e del pantografo rispettivamente. Omettendo il quadrato di  $\varepsilon$  che è affatto trascurabile di fronte al resto, l'area del quadretto medio del foglio è in  $\text{mm}^2$

$$10.000 + 200 \varepsilon = 10.000 \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{100} \right)$$

ossia è aumentata in confronto all'area primitiva nella proporzione di 1 a  $1 + \frac{2\varepsilon}{100}$ . Basterà dunque aumentare nella stessa proporzione la lunghezza  $L_0$  del braccio viaggiate del planimetro corrispondente al valore 10 dell'unità del nonio, e la lunghezza  $D - d_0$  del braccio virtuale del pantografo corrispondente al valore 1. La lunghezza da adottarsi per il braccio del planimetro sarà così:

$$L_0 + \frac{2 L_0}{100} \varepsilon,$$

e quella del *braccio virtuale* del pantografo sarà analogamente:

$$D - d_0 + \frac{2 (D - d_0)}{100} \varepsilon,$$

il che significa che il braccio effettivo  $d_0$  del pantografo dovrà essere

$$d_0 - \frac{2 (D - d_0)}{100} \varepsilon.$$

Per controllo si verificherà se fra gl'incrementi

$$\delta L_0 = + \frac{2 L_0}{100} \varepsilon, \quad \delta d_0 = - \frac{2 (D - d_0)}{100} \varepsilon$$

di  $L_0$  e di  $d_0$  esiste la relazione

$$\delta d_0 = - 0,37 \delta L_0$$

che si ricava dall'eq. (18) ponendovi  $\delta q^2 = 0$ .

19. — I due metodi citati per tener conto della variazione subita dalla scala del disegno hanno ambedue i loro vantaggi e i loro inconvenienti.

Il vantaggio del primo metodo è quello di risparmiare la determinazione preventiva delle costanti del planimetro.

Gl'inconvenienti sono: 1° il valore dell'unità del nonio del planimetro resta in sospeso fino a che non sia ultimata la misura di tutte le particelle del foglio; 2° le misure fatte da due calcolatori diversi non sono immediatamente paragonabili fra loro; 3° si è costretti a trascurare le variazioni eventualmente subite dal foglio di mappa durante il periodo delle misure.

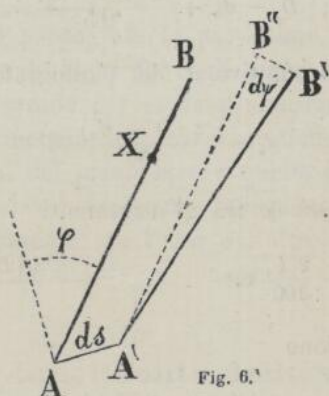
Il secondo metodo richiede una determinazione accurata delle costanti del planimetro e la regolazione o taratura dei bracci volta per volta per adattarli alla scala effettiva del foglio di mappa; ma evita tutti gli inconvenienti testè rimproverati al 1° metodo. Ora la determinazione delle costanti del planimetro si può fare mentre si eseguisce la verifica (la quale è indispensabile per tutti gli strumenti) e la taratura si fa con tutta semplicità e sicurezza nei planimetri coi bracci viaggianti graduati e muniti di nonio. Si rifletta poi che la possibilità di confrontare i risultati immediati ottenuti da due calcolatori diversi nella misura delle particelle di uno stesso foglio, è vantaggio di molto peso perchè permette di riconoscere subito se quei risultati sono o meno in tolleranza senza bisogno di far precedere il calcolo delle aree.

Parmi quindi di poter concludere che se il primo metodo può essere indicato per fogli di mappa di non grandi dimensioni aventi un perimetro regolare interamente occupato dalle figure misurate (particelle e frazioni di particelle), racchiudente un'area geometricamente calcolabile con facilità, il secondo metodo meriti la preferenza quando si tratta di fogli di mappa costruiti secondo le prescrizioni dell'*Istruzione* (IV) per la formazione delle mappe.

APPENDICE.

La formola (4) si può dimostrare nel seguente modo:

Se una retta (fig. 6) si muove in un piano con una legge qualunque l'area



$d\omega$  generata da un segmento  $AB = b$  di essa fra due posizioni infinitamente vicine  $AB, A'B'$  vale evidentemente

$$(a) \quad d\omega = b ds \cos \varphi + \frac{1}{2} b^2 d\psi$$

essendo  $ds$  l'archetto  $AA'$  descritto dall'estremità  $A$ ,  $\varphi$  l'angolo di  $AB$  colla normale all'archetto  $ds$ , e  $d\psi$  l'angolo infinitesimo  $B''A'B'$  formato da  $A'B'$  colla  $B''A'$  parallela ad  $AB$ .

Se il segmento  $AB$  dopo aver percorso un cammino qualunque riprenderà la sua posizione iniziale, avrà generato un'area che sarà evidentemente eguale alla differenza  $\omega_b - \omega_a$  delle aree circoscritte dai due punti  $B$  ed  $A$ . Quindi integrando la (a) avremo

$$\omega_b - \omega_a = b \int ds \cos \varphi + \frac{1}{2} b^2 \int d\psi$$

$AB$  può riprendere la sua posizione iniziale compiendo o non il giro di orizzonte. Se lo riprende senza compiere il giro di orizzonte la somma algebrica degli angoli infinitesimali  $d\psi$  è nulla, cioè:  $\int d\psi = 0$ ; e quindi

$$(b) \quad \omega_b - \omega_a = b \int ds \cos \varphi$$

Sulla direzione di  $AB$  consideriamo un punto  $X$  alla distanza  $x$  da  $A$ . L'area  $\omega_x$  circoscritta dal punto  $X$  sarà analogamente data dalla

$$\omega_x - \omega_a = x \int ds \cos \varphi$$

Eliminando l'integrale fra questa eq. e la (b) avremo la

$$\omega_x = \omega_a + \frac{\omega_b - \omega_a}{b} x$$

come si voleva dimostrare.







